

۱- گزینه ۱ صحیح است.

تابع مورد نظر مجانب قائم ندارد زیرا مخرج ریشه ندارد ولی حد در بینهایت آن صفر است که نشان می‌دهد مجانب افقی دارد.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{e^{x^2}} = \frac{\text{عدد}}{\infty} = 0 \Rightarrow y = 0 \quad \text{مجانب افقی}$$

$$\text{نقاط بحرانی: } \xrightarrow{y'=0} e^{-x^2} - 2x^2 e^{-x^2} = 0 \xrightarrow{e^{-x^2} \neq 0} 1 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f_{\text{Max}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{1}{2}}$$

پس فاصله $y = 0$ تا نقطه ماکزیمم $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{1}{2}}\right)$ همان فاصله y هاست و برابر $\frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{1}{2}}$ است.

$$\text{فاصله: } \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\frac{1}{e^{\frac{1}{2}}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{e}} = \frac{1}{\sqrt{2e}}$$

۲- گزینه ۱ درست است.

اولا چون $x_1, x_2 > 0$ هستند براساس رابطه اصلی دنباله، تمام جملات دنباله مثبت هستند.

$$\xrightarrow{x_k \geq 0} x_{n+2} = x_{n+1} + \frac{1}{2} x_n \Rightarrow x_{n+2} - x_{n+1} = \frac{1}{2} x_n > 0 \Rightarrow x_{n+2} - x_{n+1} > 0$$

براساس تعریف یکنوایی دنباله مورد نظر قطعا صعودی است. براساس آزمون مقایسه و صعودی بودن دنباله می‌فهمیم

 $x_{n+1} > x_n$ خواهد بود. پس:

$$x_{n+2} = x_{n+1} + \frac{x_n}{2} > x_n + \frac{x_n}{2} \stackrel{\text{شیفت}}{=} \frac{3x_n}{2} \Rightarrow x_{n+2} > \frac{3x_n}{2}$$

$$n = 1 \Rightarrow x_3 > \frac{3x_1}{2}$$

$$n = 2 \Rightarrow x_4 > \frac{3x_2}{2}$$

$$n = 1 \Rightarrow x_5 > \frac{3x_3}{2}$$

$$x_n = \begin{cases} x_{2n} > \left(\frac{3}{2}\right)^{2n} x_2 \\ x_{2n+1} > \left(\frac{3}{2}\right)^n x_1 \end{cases} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{cases} x_{2n} > \infty \\ x_{2n+1} > \infty \end{cases} \Rightarrow x_n > \infty \quad \text{دنباله واگراست}$$

۳- گزینه ۲ صحیح است.

$$\kappa = \frac{|r^2 + 2r'^2 - rr''|}{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\left|\frac{1}{16} + 2\left(\frac{3}{16}\right) - \frac{5}{16}\right|}{\left(\frac{1}{16} + \frac{3}{16}\right)^{\frac{3}{2}}} = 1$$

$$r = \frac{1}{16} \left(1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}\right) \xrightarrow{\theta = \frac{2\pi}{3}} r = \frac{1}{4}$$

$$r' = \frac{1}{16} \tan \frac{\theta}{2} \sec^2 \frac{\theta}{2} \rightarrow r' = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$r'' = \frac{1}{16} \left(\frac{1}{2} \sec^4 \frac{\theta}{2} + \sec^2 \frac{\theta}{2} \tan^2 \frac{\theta}{2}\right) \rightarrow r'' = \frac{5}{4}$$

۴- گزینه ۴ صحیح است.

باتوجه به صودی بودن عبارت e^u ، کافی است u را تحت قید مورد نظر اکستریم نماییم. باتوجه به نامساوی داشتن قید مورد نظر، هم باید نقاط اکستریم روی قید هم نقاط دورن قید را تعیین کنیم.

$$\text{دورن قید: } \xrightarrow{x^2 + 4y^2 < 1} u(x, y) = -xy \Rightarrow \begin{cases} -y = 0 \\ -x = 0 \end{cases} \rightarrow A = (0, 0) \rightarrow f(0, 0) = e^0 = 1$$

اکستریم‌یابی به روش لاگرانژ: روی قید

$$\xrightarrow{g: x^2 + 4y^2 = 1} \begin{cases} \nabla u = \lambda \nabla g \\ g = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -y = \lambda 2x \\ -x = \lambda 4y \\ g = 0 \end{cases} \rightarrow \frac{y}{x} = \frac{x}{4y} \Rightarrow 4y^2 = x^2 \rightarrow x^2 = \frac{1}{2}, y^2 = \frac{1}{8}$$

یعنی چهارنقطه بحرانی $(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{2\sqrt{2}})$ که منجر به مقادیر $e^{\frac{1}{4}}$ و $e^{-\frac{1}{4}}$ می‌شود که در مقایسه با ۱ بیشترین و کمترین مقادیر

تابع تحت قید مذکور هستند.

۵- گزینه ۱ صحیح است.

$$V = \iiint_w dv = \iint_D \int_{1+x^2+y^2}^{4-2x^2-11y^2} dz \, dA$$

$$\text{تلاقی دو رویه } D : 4 - 2x^2 - 11y^2 = 1 + x^2 + y^2 \Rightarrow 3x^2 + 12y^2 = 3 \Rightarrow x^2 + \frac{y^2}{\frac{1}{4}} = 1$$

$$\Rightarrow V = \iint_{x^2 + \frac{y^2}{\frac{1}{4}} = 1} (3 - 3x^2 - 12y^2) \, dA = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (3 - 3r^3) \left(1\right) \left(\frac{1}{4}\right) r \, dr \, d\theta$$

$$V = \frac{3}{4} \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_0^1 (r - r^3) \, dr \right) = \frac{3}{4} \times 2\pi \times \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right) \bigg|_0^1 = \frac{3\pi}{4}$$

تنها گزینه‌ای که در معادله فوق صدق می‌کند گزینه ۳ است.